بررسی هندسی شکل ستارهٔ منتظم

علیرضا حقّی
دانش‌آموز دورهٔ
پیش‌دانشگاهی
دبیرستان فرهنگ دهخدا

مقدمه

انسان از دیرباز، با ساخت بناها و اشیای گوناگون، علاقهٔ وافر خود را به زیبایی محیط پیرامونش نشان داده است. هندسه علمی است که بیشترین کمک را به وی، برای تحقق این هدف کرده است. دو مفهوم اساسی در هندسه، یعنی محیط و مساحت، بیشترین کاربرد را در ساخت اشیا، به‌خصوص بناها در زندگی آدمی ایفا کرده‌اند. با تعریف شکل‌های جدید، هندسه نیز تقویت شد و لازم بود محیط مساحت آن‌ها نیز محاسبه شود. شکل‌های هندسی گوناگونی وجود دارند که در این بین، برخی در دسته‌های معینی جای می‌گیرند. یکی از این دسته‌ها، دستهٔ «ستارگان منتظم» است که قوانین و نظام جالبی دارد. در این مقاله، نویسنده کوشیده است فرمول‌هایی جامع و ساده برای محاسبهٔ محیط و مساحت ستاره‌های منتظم ارائه دهد.

تعریف و توضیح

در این بخش، ابتدا به تعریف شکل ستاره می‌پردازیم و سپس به نکات و توضیحات اشاره خواهیم کرد.

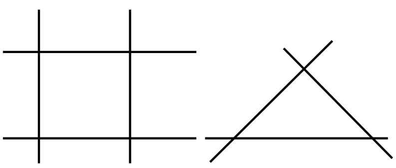
■ **تعریف:** به شکل حاصل از امتداد اضلاع یک «nضلعی محدب منتظم»، «ستارهٔ منتظم n پَر» می‌گویند. به عبارت دیگر، سطح ایجاد شده از برخورد امتدادهای اضلاع یک nضلعی محدب و منتظم، ستارهٔ منتظم n پر نام دارد.

nضلعی محدبی که ستاره از امتداد اضلاع آن به‌دست می‌آید nضلعی مولد آن ستاره نام دارد. لازم به ذکر است که ستاره، برخلاف nضلعی مولدش که محدب است، شکلی مقعر دارد. به هر یک از مثلث‌هایی که از برخورد امتدادهای اضلاع nضلعی به‌وجود می‌آیند، یک پر ستاره می‌گوییم.

نکتهٔ دیگر اینکه تعداد پرهای هر ستارهٔ منتظم، با تعداد اضلاع چندضلعی مولدش برابر است. البته باید توجه کرد که تعداد اضلاع هر ستارهٔ n پر، برابر با 2n است؛ یعنی تعداد اضلاع ستارگان منتظم، دو برابر تعداد پرهایشان است. مطابق تعریف بالا، برای اینکه ستاره‌ای منتظم باشد، می‌باید nضلعی مولدش نیز منتظم باشد. بنابراین، ستارهٔ منتظم ۵ پر نمی‌تواند حاصل امتداد اضلاع یک پنج‌ضلعی نامنتظم باشد.

با توجه به توضیحات فوق، می‌توان دریافت که از امتداد اضلاع مثلث و مربع، هیچ سطح منتظمی پدید نمی‌آید. بنابراین در این مقاله که بحث حول ستاره‌های منتظم است، n باید عدد صحیح بزرگ‌تر از چهار باشد.

پس می‌توان گفت ساده‌ترین ستارهٔ منتظم، «ستارهٔ منتظم ۵ پر» است.



شکل ۱.

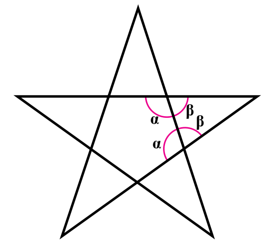
■ **قضیهٔ یک:** طول همهٔ اضلاع در هر ستارهٔ منتظم با یکدیگر برابر است.

■ **اثبات:** با توجه به اینکه در هر nضلعی محدب منتظم، علاوه بر اضلاع، اندازهٔ تمام زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ زاویه‌های مکمل آن‌ها (زاویه‌های خارجی n ضلعی) نیز با یکدیگر برابر است:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \alpha+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \beta=\gamma$$

از برابر بودن دو زاویهٔ هر رأس نتیجه می‌گیریم که هر پر ستاره، مثلثی متساوی‌الساقین است، بنابراین ساق‌های

مثلث که اضلاع ستاره را تشکیل می‌دهند، دارای طول‌های یکسان هستند.

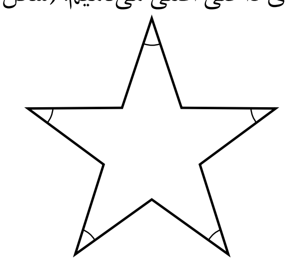


شکل ۲.

زاویه‌های داخلی ستارهٔ منتظم

در هر ستارهٔ منتظم دو نوع زاویهٔ داخلی وجود دارد که در این مقاله نام نوع اول را «زاویهٔ داخلی اصلی» و نام نوع دیگر را «زاویهٔ داخلی فرعی» می‌گذاریم.

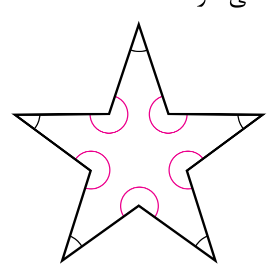
زاویه‌های مشخص شده در این ستارهٔ ۵ پر منتظم، زاویه‌های داخلی اصلی هستند. بنابراین زاویه‌های حاصل از برخورد امتدادهای اضلاع چندضلعی مولد ستاره را زاویه‌های داخلی اصلی می‌نامیم. (شکل ۳)



شکل ۳.

زاویه‌های مشخص شده در ستارهٔ شکل ۴ داخلی فرعی هستند.

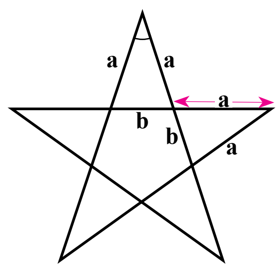
از این تحلیل می‌توان نتیجه گرفت که هر ستارهٔ n پر منتظم، n زاویهٔ داخلی اصلی و n زاویهٔ داخلی فرعی دارد و در مجموع ۲n زاویهٔ داخلی دارد.



شکل ۴.

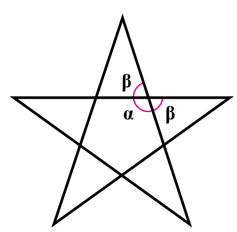
نکتهٔ مهم دیگر این است که در ستاره‌های منتظم، اندازهٔ تمام زاویه‌های داخلی اصلی با هم، و تمام زاویه‌های داخلی فرعی با هم برابرند. اثبات آن را در ادامه مشاهده می‌کنید.

از آنجا که در ستاره‌های منتظم طول تمام اضلاع با هم برابر است (طبق قضیهٔ یک) و نیز n ضلعی‌های مولد آن‌ها منتظم هستند و طول تمام ضلع‌هایشان با یکدیگر برابرند، پرهای ستاره (مثلث‌های کناری) به حالت تساوی سه ضلع، با یکدیگر هم‌نهشت می‌شوند. بنابراین زوایای متناظر این مثلث‌ها، یعنی زوایای داخلی اصلی ستاره نیز با یکدیگر برابر می‌شوند.



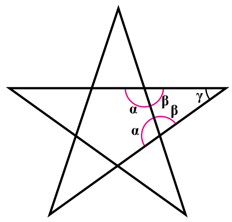
شکل ۵.

می‌دانیم در n ضلعی‌های منتظم محدب، علاوه بر طول ضلع‌ها، اندازهٔ زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر است. مطابق شکل ۶، اندازهٔ تمام زوایای پهن با یکدیگر برابر و هر کدام برابر با $\alpha+۲\beta$ است.



شکل ۶.

در ادامه، اندازهٔ زاویه‌های مذکور را برحسب تعداد پرهای ستاره به‌دست می‌آوریم: از آنجا که فرمول کلی زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب چنین است:



شکل ۷.

داریم:
$$\alpha = \frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$$

$$\alpha+\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta = ۱۸۰^\circ - \alpha \xrightarrow{\text{به کمک رابطهٔ بالا}}$$

$$\beta = ۱۸۰^\circ - \frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n} = ۱۸۰ - \frac{۱۸۰n - ۳۶۰}{n}$$
$$= ۱۸۰ - ۱۸۰ + \frac{۳۶۰}{n} = \frac{۳۶۰}{n}$$

و طبق فرمول مجموع زاویه‌های داخلی مثلث:

$$\beta+\beta+\gamma = ۱۸۰ \Rightarrow \gamma = ۱۸۰ - ۲\beta \Rightarrow \gamma = ۱۸۰ - \frac{۷۲۰}{n}$$

که زاویهٔ γ در واقع همان زاویهٔ داخلی اصلی در ستارهٔ منتظم است. حال به محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ داخلی فرعی می‌پردازیم:

همان‌طور که در توضیح زاویهٔ داخلی فرعی در بالا ذکر شد، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی فرعی برابر است با: $\alpha+۲\beta$ و داریم:

$$\theta = \alpha + ۲\beta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} + ۲\left(\frac{۳۶۰}{n}\right) = ۱۸۰ - \frac{۳۶۰}{n} + \frac{۷۲۰}{n}$$
$$= ۱۸۰ + \frac{۳۶۰}{n} = \frac{(n+۲)۱۸۰}{n}$$

و نیز همان‌طور که در بالا ذکر شد، هر ستارهٔ منتظم از n زاویهٔ داخلی اصلی و n زاویهٔ داخلی فرعی تشکیل شده است. بنابراین مجموع تمام زاویه‌های داخلی هر ستارهٔ منتظم برابر است با:

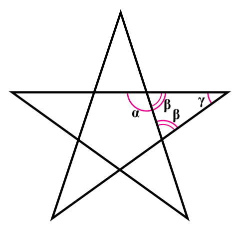
$$n\gamma + n\theta = n\left(۱۸۰ - \frac{۷۲۰}{n}\right) + n\left(\frac{(n+۲)۱۸۰}{n}\right)$$
$$= ۱۸۰n - ۷۲۰ + ۱۸۰n + ۳۶۰$$
$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} = n\gamma + n\theta = (n-۱)۳۶۰^\circ$$

یافتن محیط و مساحت

در بخش قبل دیدیم که اندازهٔ زاویه‌های داخلی تنگ با یکدیگر و اندازهٔ زاویه‌های داخلی پهن نیز با یکدیگر برابر است. در این بخش، برای یافتن مساحت ستارهٔ

n پر منتظم، مساحت‌های n ضلعی مولد و n مثلث کناری ستاره (پر) را به‌دست می‌آوریم و با یکدیگر جمع می‌کنیم. پس ابتدا اندازهٔ هر کدام از زاویه‌های تنگ را که برای محاسبهٔ مساحت n ضلعی مولد لازم است، محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم که اندازهٔ هر کدام از زاویه‌های داخلی یک n ضلعی منتظم، از رابطهٔ $\frac{180(n-2)}{n}$ به‌دست می‌آید. بنابراین مطابق شکل ۹، اندازهٔ زاویهٔ α برابر با $\frac{180(n-2)}{n}$ خواهد بود. از آنجا که زاویه‌های α و β مکمل یکدیگرند، اندازهٔ زاویهٔ β برابر با $180-\alpha$ و به‌طور دقیق‌تر برابر با $\frac{360}{n}$ خواهد شد. اما زاویه‌ای که برای ما اهمیت دارد، زاویهٔ γ است. چون مجموع زوایای داخلی در هر مثلث مساوی 180° است، اندازهٔ γ از رابطهٔ $180-\frac{720}{n}$ به دست می‌آید.



شکل ۸.

همچنین مساحت هر n ضلعی محدب منتظم از رابطهٔ $\frac{nb^4}{4\tan\frac{180}{n}}$ به‌دست می‌آید که در آن، b طول ضلع n ضلعی و n تعداد اضلاع آن است. این رابطه مساحت n ضلعی را برحسب طول ضلع n ضلعی به‌دست می‌دهد، ولی ما می‌خواهیم مساحت ستاره را برحسب طول ضلع ستاره حساب کنیم. بنابراین می‌باید طول ضلع n ضلعی را برحسب طول ضلع ستارهٔ n پر منتظم به‌دست بیاوریم.

برای به‌دست آوردن رابطهٔ a و b می‌توانیم از قانون کسینوس‌ها استفاده کنیم:

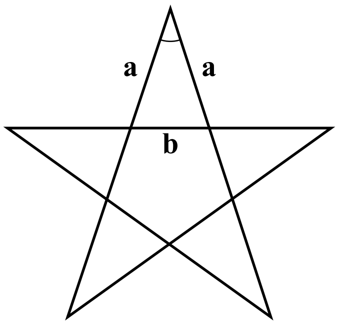
$$b^2 = a^2 + a^2 - 2\times a\times a\times \cos\gamma$$

در این صورت، مساحت n ضلعی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A_{\text{ضلعی منتظم محدب}} = \frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{180}{n}}$$

مساحت‌های هر کدام از مثلث‌های کناری را نیز می‌توان به روش زیر محاسبه کرد:

$$A_{\text{یک مثلث}} = \frac{1}{2}a\times a\times\sin\gamma = \frac{1}{2}a^2\sin\gamma$$



شکل ۹.

مطابق آنچه که در بخش‌های قبل ذکر شد، هر ستارهٔ n پر منتظم دارای n مثلث کناری مساوی و هم‌مساحت است. پس مساحت کل مثلث‌ها برابر است با:

$$A_{\text{همهٔ مثلث‌ها}} = \frac{n}{2}a^2\sin\gamma$$

طبق آنچه که گفته شد، مساحت ستاره از مجموع دو مساحت به‌دست آمده محاسبه می‌شود:

= مساحت ستاره

مجموع مساحت‌های مثلث‌های کناری + n ضلعی مولد

$$A_{\text{ستارهٔ منتظم پنج پر}} = \frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{180}{n}} + \frac{n}{2}a^2\sin\gamma$$